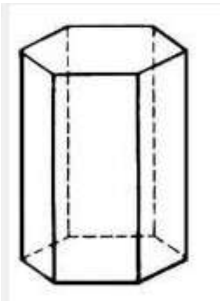
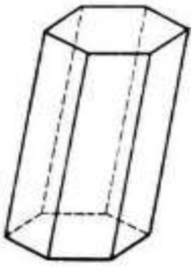
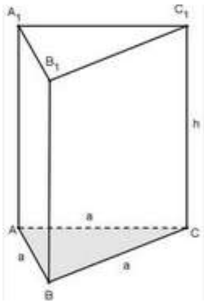
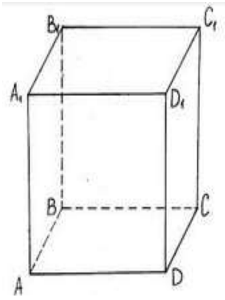
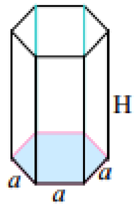
Тема 7: ЕЛЕМЕНТИ ОД СТЕРЕОМЕТРИЈА

Плоштина и волумен на геометриски тела

ПРИЗМА

Права призма **Коса призма** **Триаголна призма** **Четириаголна призма** **Шестаголна призма**

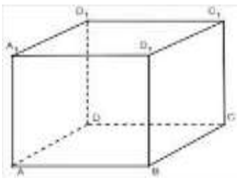
Ако основите на права призма се правилни многуаголници, тогаш призмата е **ПРАВИЛНА** .

$P = 2B + M$ - плоштина на призма, $B -$ плоштина на основата,

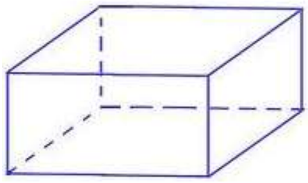
$M = L \cdot s$ - бочна плоштина (ако призмата е права $s = H$, па $M = L \cdot H$),

$V = B \cdot H$ - волумен на призма

$a -$ основен раб, $s -$ бочен раб, $H -$ висина на призмата



коцка



квадар

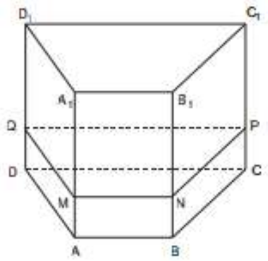
$P = 6a^2$ - плоштина на коцка

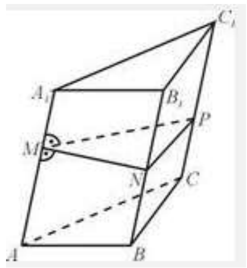
$V = a^3$ - волумен на коцка

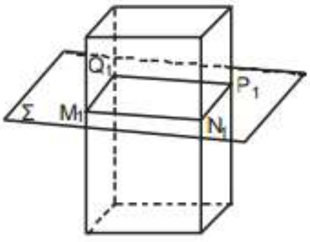
$P = 2(ab + bc + ac)$ - плоштина на квадар

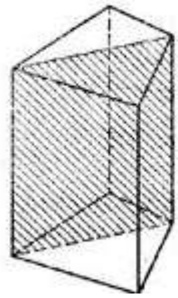
$V = a \cdot b \cdot c$ - волумен на квадар

Пресеци на призма со рамнина









Паралелен пресек **Нормален пресек** **Кос пресек** **Дијагонален пресек**

Ако рамнината ги содржи центрите на основите кај правилна призма, тогаш пресекот е **оскин пресек**.

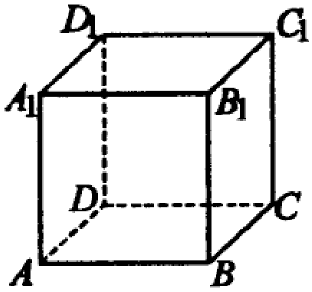
Плоштина и волумен на призма

Плоштината на една призма е еднаква на збирот од плоштините на нејзините основи ***B*** и плоштината на нејзината обвивка ***M***, т.е.

$$P = 2B + M$$

Волуменот на призма е еднаков на производот од плоштината на основата ***B*** и висината на призмата ***H***, т.е.

$$V = B \cdot H$$



Задачи за плоштина и волумен на призма

1. Пресметај плоштина и волумен на коцка со основен раб a= 8cm.

2. Пресметај плоштина и волумен на квадар со димензии 2cm, 4cm и 10 cm.

3. Пресметај плоштина и волумен на правилна четириаголна призма со основен раб 7cm и бочен раб 10cm.

4. Пресметај плоштина и волумен на права призма со основа ромб со дијагонали 6cm и 8cm и висина на призмата 14 cm.

5. Пресметај плоштина и волумен на правилна шестаголна призма со основен раб 6 cm и висина 12 cm.

6. Пресметај плоштина и волумен на права призма со основа правоаголник со димензии 3 cm и 4 cm, ако висината на призмата е 7 cm.

7.Пресметај ја дијагоналата на коцката ако нејзината плоштина е 600 cm^2.

8.Пресметај плоштина на правилна триаголна призма со основен раб 8 cm и висина 6 cm.

9. Еден базен е долг 30 метри, широк 20 метри и длабок 2 метри. Пресметај колку вода собира во базенот ($1m^3$=1000 литри).

10. Збирот од должините на сите рабови на коцката изнесува 96 cm. Пресметај ја плоштината и волуменот на коцката.

11. Една училница треба да собере 35 ученици. Секој ученик треба да има по 8 m^3 воздух. Колку метри кубни треба да е подот на училницата, ако висината и е 3 метри?

12.Еден базен е во форма на правилна шестоаголна призма со основен раб 10 m и длабочина 1,8 m. Колку литри вода собира базенот ?

13.Висината на една права триаголна призма е 8cm, а основата и е правоаголен триаголник со катети 9 cm и 12 cm. Пресметај ја плоштината и волуменот на призмата.

14. Дијагоналата на коцка е $13\sqrt{3}$ cm. Пресметај ги плоштината и волуменот.

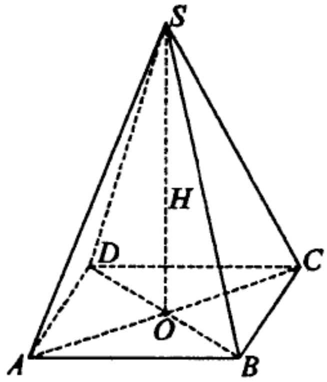
ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДА

Плоштината на пирамидата е еднаква на збирот од плоштината на основата ***B*** и обвивката ***M***, т.е.

$\boldsymbol{P = B + M}$

Волуменот на која било пирамида е еднаков на третина од производот на плоштината на основата и должината на нејзината висина, т.е

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H$$



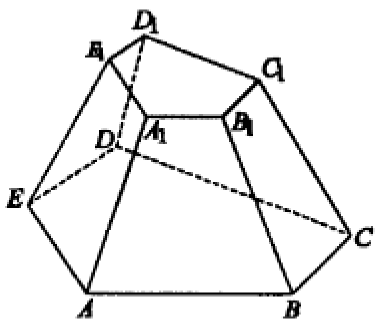
ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕНА ПИРАМИДА

Плоштината на потсечена пирамида е еднаква на збирот од плоштините на нејзините основи B и B_1 и обвиката M, т.е.

$P = B + B_1 + M$

Ако висината на потсечената пирамида е H, а плоштините на основите се B и B_1, тогаш нејзиниот волумен е

$$V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$$



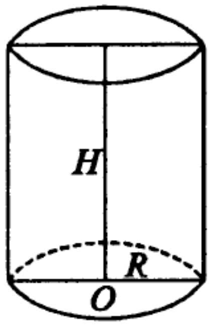
ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ЦИЛИНДАР

Плоштината на цилиндар е еднаква на збирот од плоштините на основите B и обвивката M, т.е.

$P = 2B + M$, односно
$P = 2\pi R\ (R + H)$

Волуменот на кој било цилиндар е еднаков на производот од плоштината на неговата основа и висината, т.е.

$$V = \pi R^2 H \ .$$



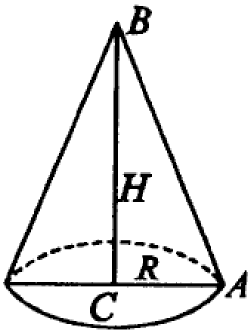
ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА КОНУС

Плоштината на конус е еднаква на збирот од плоштината на основата ***B*** и обвивката ***M***, т.е.
P = B + M, односно
P = πR (R + s),

(***R***-радиус на основата,s-генератриса).

Волуменот на кој било конус е еднаков на третина од производот на плоштината на основата и неговата висина, т.е.

$$V = \tfrac{1}{3} R^2 \pi H$$



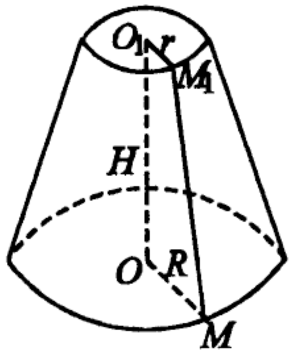
ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕН КОНУС

Плоштината на потсечен конус е еднаков на збирот од плоштините на двете основи и плоштината на неговата обвивка, т.е.

$$P = \pi \left[R^2 + r^2 + s (R + r) \right]$$

Волуменот на потсечен конус се пресметува со формулата:

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$$

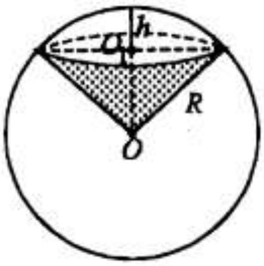


ВОЛУМЕН НА ТОПКА И ДЕЛОВИ НА ТОПКА

Волуменот ***V*** на топка со радиус ***R*** се пресметува со формулата

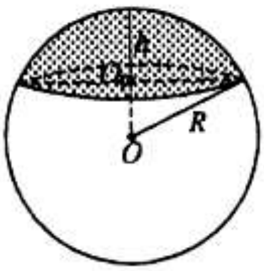
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ Волуменот ***V*** на топкин исечок се пресметува со формулата

$V = \frac{4}{3}R^2 h\pi$ во која ***R*** е радиусот на топката, ***h*** е висината на калотата



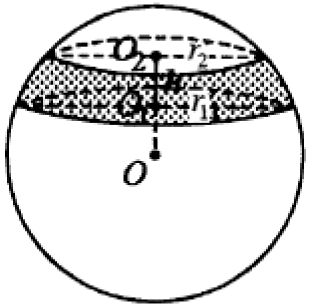
Волуменот ***V*** на топкин отсечок со висина ***h*** и радиус на топката ***R*** (црт.22) се пресметува со формулата

$$V = \frac{h^2\pi}{3}(3R - h)$$

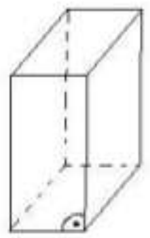


Волуменот ***V*** на топкин слој со висина ***h*** и радиуси на граничните кругови ***r1*** и ***r2*** се пресметува со формулата

$$V = \frac{\pi h}{3}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$$

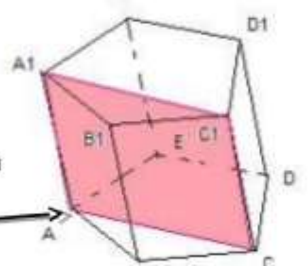


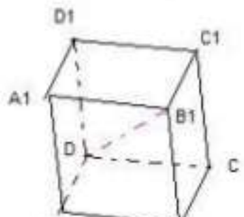
-Призмата при која бочните ѕидови се нормални на основите се вика права призма.
-Призмата при која бочните ѕидови не се нормални на основите се вика крива призма.
-Четириаголна призма со основа паралелограм се вика **паралелопипед.**



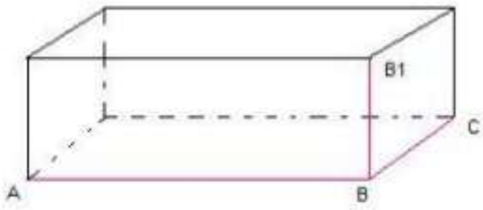
-Отсечката чии крајни точки се две темиња на една призма,што не лежат на ист ѕид,се вика просторна дијагонала или само дијагонала на призмата.

-Пресекот на призма со рамнина што минува низ два несоседни бочни раба на призмата се вика дијагонален пресек.



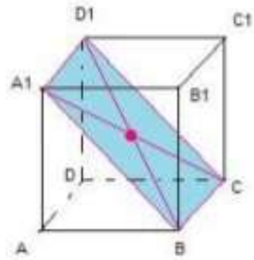


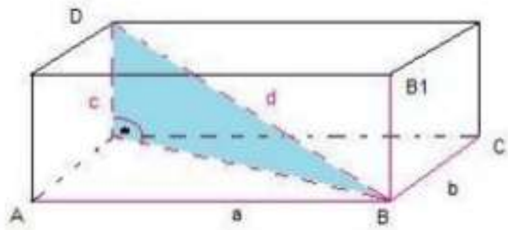
Паралелопипед. Мрежа и плоштина



-Паралелопипед што е прав и има основа правоаголник се вика правоаголен паралелопипед или квадар.
-Должините на трите раба што излегуваат од едно теме се викаат димензии на квадарот.
-Квадар на кој димензиите му се еднакви се вика коцка.

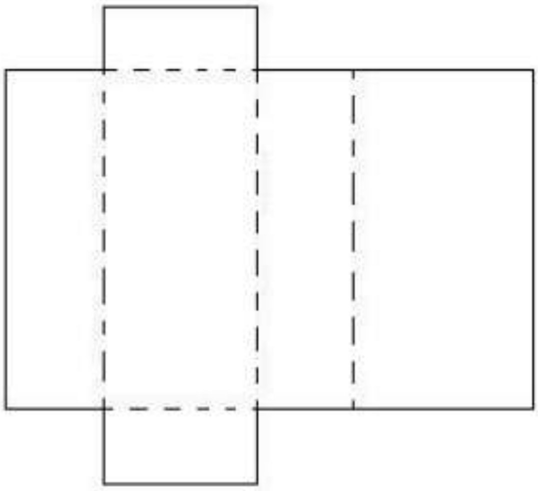
Кај квадарот сите четири дијагонали се еднакви меѓу себе.
-Тие се сечат во една точка и се преполуваат со неа.





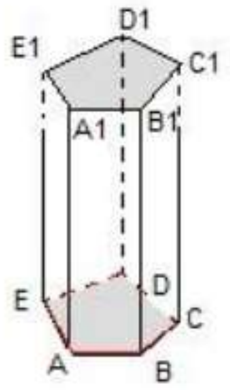
$d=\sqrt{a2 + b2 + c2}$

Мрежа



-Секоја права призма има своја мрежа . Мрежата е составена од два многуаголника и еден правоаголник со димензии L (периметарот на основата) и H(должината на бочниот раб, т.е. висината) на призмата.

Плоштина



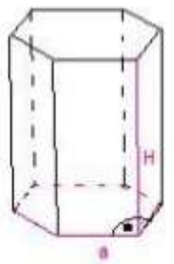
-Збирот од плоштините на сите ѕидови на една призма се вика плоштина на призмата.

P= 2B + M

B-плоштина на една основа

M- плоштина на бочната површина

Плоштината M на бочната површина на права призма се пресметува на формулата



M = L x H

Каде што L е периметарот на основата, а H е висината на призмата.

Плоштина на квадар со димензии a,b,c :

P = 2(ab + ac + bc)

Плоштина на коцка со раб а:

P= 6a2

Плоштина на правилна триаголна призма

P= a2√3/2 + 3aH

Плоштина на правилна четириаголна призма

P= 2a (a + 2H)

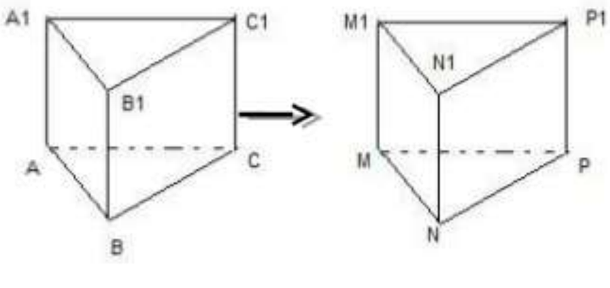
Плоштина на правилна шестоаголна призма

P= 3a (a√3 + 2H)

со основен раб а и висина Н

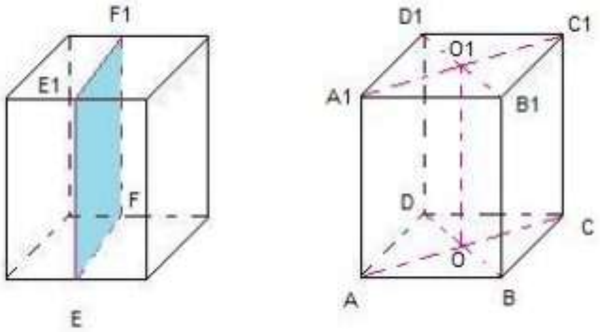
- **<u>Волумен на полиедар. Волумен на квадар и коцка</u>**

-Геометриско тело е ограничен и затворен дел од просторот.
- Ако површината со која е затворено телото е составена само од многуаголници, тогаш за него се вели дека е рабесто тело или полиедар. Пример ..призма,пирамида и.т.н.
-Ако,пак, некои делови од површината што ги заградува телото се криви,тогаш за него се вели дека е валчесто тело. Пример ...цилиндар,конус,топка и.т.н.



- За две геометриски фигури може да се рече дека се складни,ако тие, со поместување може да се доведат до совпаѓање.

- Квадарот на првиот цртеж е пресечен со рамнина , така што се добиени два квадра.
-Тие имаат заеднички ѕид, но немаат заеднички внатрешни точки.
- За нив велиме дека се составни делови –составки на дадениот квадар.
- На колку составни делови е поделена призмата на вториот цртеж? Именувај ги.



Волумен

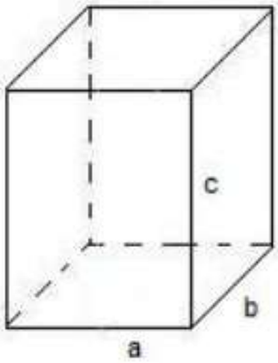
-За "големината" на внатрешниот дел од телото, т.е. На зафатениот дел од просторот, се вели дека е волумен на телото

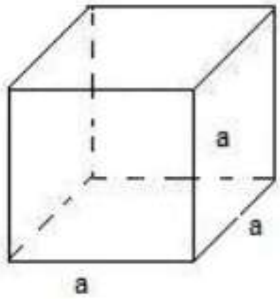
-На кој било полиедар може да му се придружи реален број V, наречен волумен на полиедар,така што да бидат задоволени следните услови-аксиоми за волумен.

1. Волуменот V на кој било полиедат е позитивен број V>0
2. Ако два полиедри се складни,тогаш нивните волумениV1 и V2 се еднакви т.е. V1=V2
3. Аји еден поледар е поделен на два составни дела,тогаш нивниот волумен е еднаков со збирот на волуменитеV1 и V2 на составните делови,т.е. V=V1+ V2
4. Се зема една коцка со раб 1cm има волумен 1cm3

-Во врска со условот 4. мошне е важно да се утврди основна мерна единица за волумен. За таква единица може да се земе волуменот на која било коцка. Но, со Меѓунариодниот систем на мерни единици, прифаено е тоа да биде коцка со раб 1m што е наречена кубен метар ознака-m3.

-За мерење волумен(обично на течности) се употребува и мерната единица литар .
Притоа: 1l=1dm3

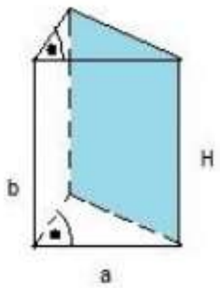


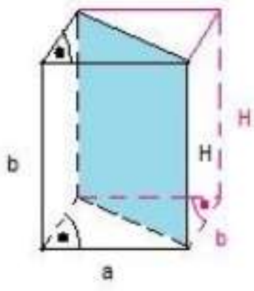


V = abc **V=a3**

Формулата за волумен на квадар може да се запише и во облик V = B x H каде што B=a X b е плоштина на основата, а H=c е висината на квадарот.

- **Волумен на права призма**





-За пресметување на волуменот на права призма со основа правоаголен триаголник важи истата формула како за квадар
V=BH

- Волуменот Vk на квадарот е двапати поголем од волуменот V на дадената триаголна призма т.е. Vk= 2V

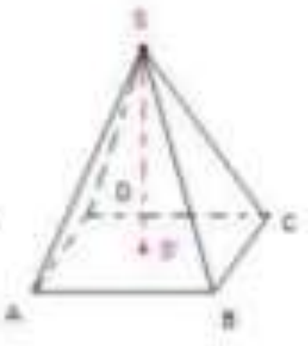
-Знаеме дека Vk=abH, па 2V=abH т.е. V=ab/2 x H

-Бидејќи ab/2 е плоштина на основата на дадената призма т.е. B=ab/2 , за волименот на призмата можеме да запишеме

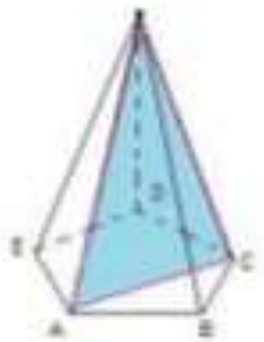
V = B x H

-Формили за:
а) правилна триаголна призма B= a2√3/4, V=a2H√3/4
б) правилна четириаголна призма B= a2 , V = a2h
в) правилна шестоаголна призма, со основен раб а и висина H B= 3a2√3/2 , V=3a2H√3/2

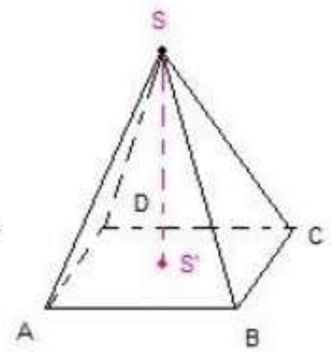
-Отсечката SS’,каде што S е врвот на пирамидата,а S’ е неговата ортогонална проекција врз оснвата се вика висина на пирамидата.
-Точката S’ е подножје на висината.Обично и должината SS’ се вика висина на пирамидата.



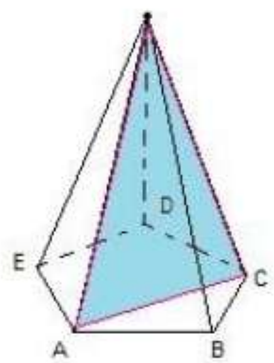
-Пресекот на пирамидата со рамнина што минува низ врвот и низ која било дијагонала на основата се вика дијагонален пресек.



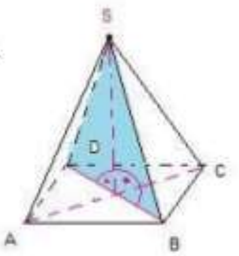
-Отсечката SS’,каде што S е врвот на пирамидата,а S’ е неговата ортогонална проекција врз оснвата се вика висина на пирамидата.
-Точката S’ е подножје на висината.Обично и должината SS’ се вика висина на пирамидата.

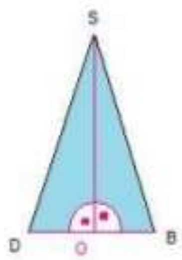


-Пресекот на пирамидата со рамнина што минува низ врвот и низ која било дијагонала на основата се вика дијагонален пресек.

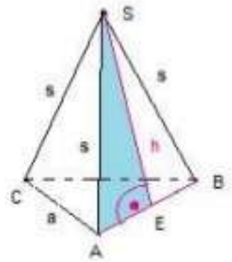


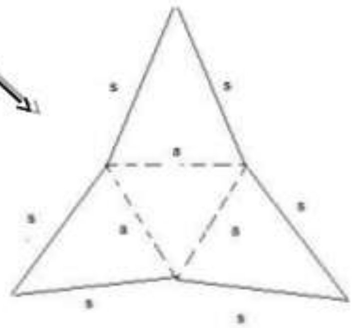
- За оваа пирамида и за секоја друга при која основата е правилен многуаголник,а подножјето на висината паѓа во центарот на основата, се вики дека е правилна пирамида.
-Висината h на кој било бочен ѕид на правилна пирамида се вика апотема на пирамидата.

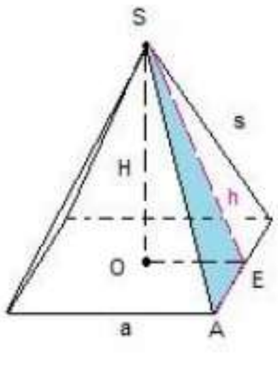




- Ако се разрежат сите основни рабови (освен еден) и само еден бочен раб,тогаш површината на една пирамида може да се распростре на рамнина.Така се добива мрежа на пирамидата.







-Како и кај призмата, збирот од плоштините на сите ѕидови на една пирамида се вика плоштина на пирамидата.
-Според тоа, ако B е плоштинатата на основата, а M плоштината на бочната површина,тогаш плоштината P на пирамидата ќе биде :

P = B + M

- Дадено:

Основен раб 14 cm
Бочен раб s= 25cm

-Решение

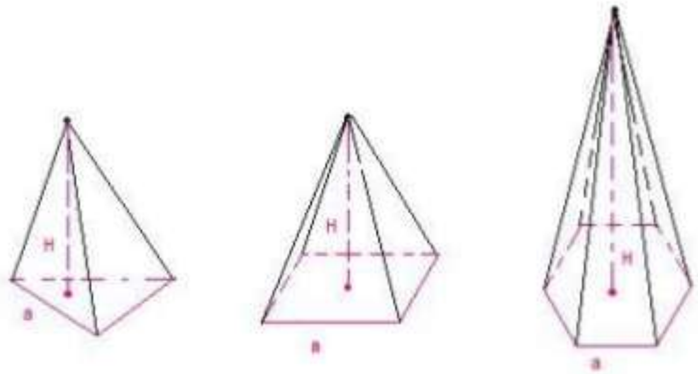
$$B = a^2 = 14^2 = 196 \rightarrow B = 196\ cm^2$$
$$M = 4 \times a \times h / 2 = 2\ ah$$
$$h^2 = s^2 - (a/2)^2 = 25^2 - 7^2 = 625 - 49 = 576\ \ h = 24\ cm$$
$$M = 2ah = 2 \times 14 \times 24 = 672 \rightarrow M = 672\ cm^2$$
$$P = B + M = 196 + 672 = 868 \rightarrow P = 868\ cm^2$$

● **Волумен на пирамида**

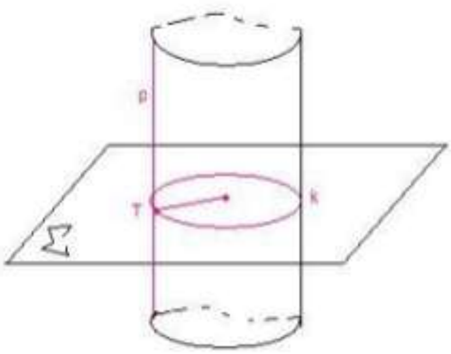
-Волуменот V на една пирамида е еднаков на една третина од производот на висината H и плоштината B на основата на пирамидата т.е. :

V = B x H /3

Формули за:
а) рамностран триаголник   B = a2√3/4 ; V = a2H√3/12
б)правилен шестоаголник   B = 3 x a2√3/2 ; V = a2H/ 3
в)квадрат B= a2 ; V = a2H√3/2

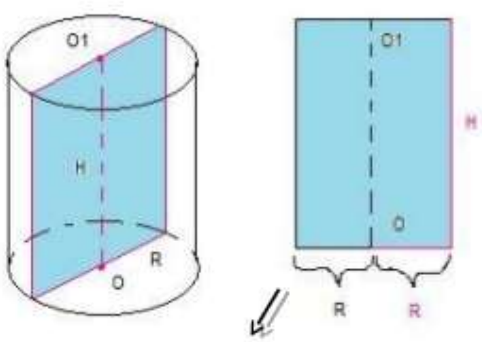


● **Цилиндар. Плоштина и волумен**



- Да замислиме дека точката Т почнува да се движи по кружницата, а правата р да останува паралелна на својата почетна положба.
- На тој начин подвижната права р опишува една површина- тоа е цилиндрична површина.

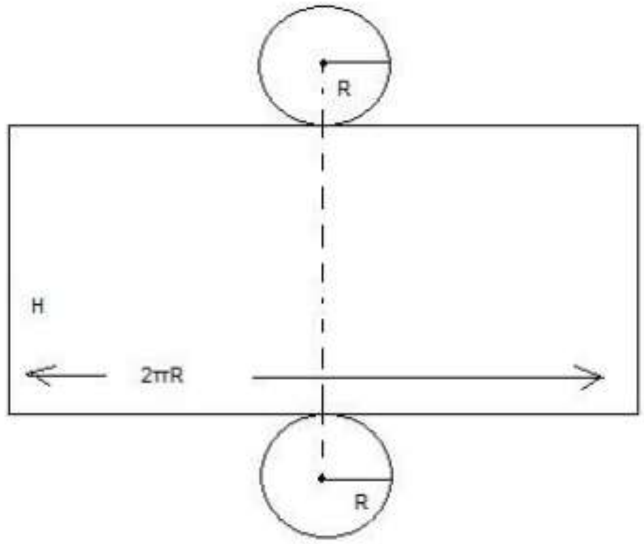
-Круговите се викаат основи, а делот од цилиндричната површина меѓу нив-бочна површина на цилиндарот.
- Радиусот на R на основата се вика радиус на цилиндарот.
-Отсечката ОО1 (чиишто крајни точки се центрите на основите) се вика оска на цилиндарот,таа е и негова висина.



- Ако цилиндарот се пресече со рамнина што минува низ неговата оска,се добива еден правоаголник што се вика осен пресек.

Мрежа

- Ако цилиндарот се расече по една негова генератриса и по периферијата на основите, тогаш може да се види дека мрежата на цилиндарот е составена од два склади круга и еден правоаголник



Плоштина и Волумен

а)P = 2B + M (B –плоштина на основата, M – плоштина на бочната површина)
б)B = R2π   M=2Rπ x H
в)P = 2R2π + 2Rπ x H
P = 2Rπ (R + H)

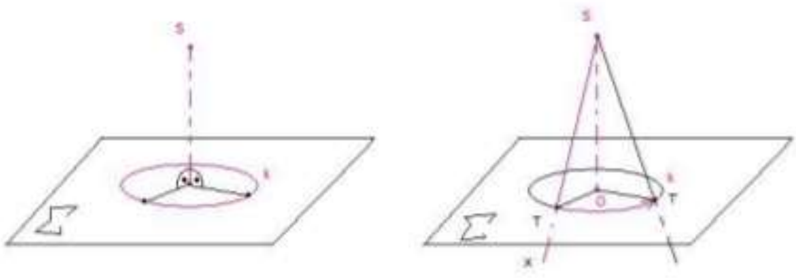
Волумен

V = B x H   V = R2 π x H

Формула за плоштина и волумен на рамностран цилиндар , со радис R
P = 6R2π
V= 2R3π

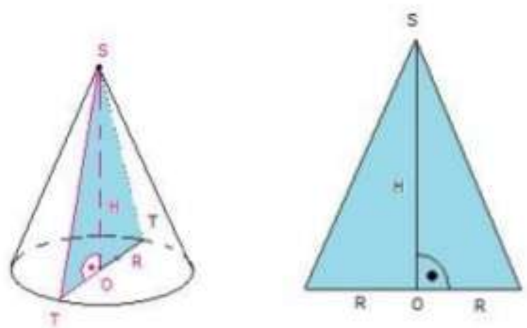
-За цилиндар чијшто осен пресек е квадрат,т.е. H=2R , се вели дека е рамностран цилиндар.

● **Конус. Плоштина и Волумен**



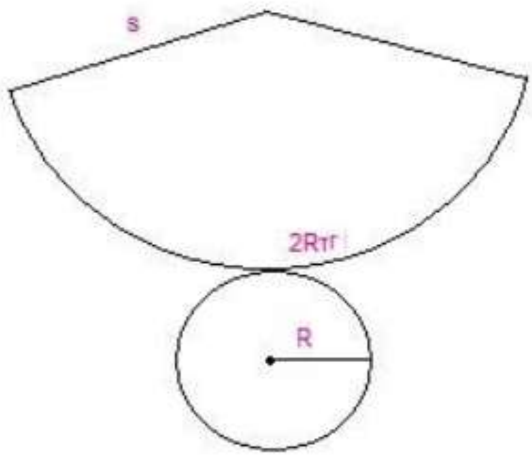
- Точката Т почнува да се движи по кружницата, а полуправата SX да се "лизга" по кружницата.
- На тој начин подвижната полуправа опишува една површина- тоа е конусна површина.
-За полуправата SX се вели дека е генератриса (изведница),за кружницата-директриса(водилка),а точката S –врв.
-Кругот што го отсекува конусната површина од рамнината и делот од површината од кај врвот ,заградуваат дело од просторот, т.е. Образуваат едно геометриско тело што се вика прав кружен конус или само конус.

-Кругот се вика основа,а делот од конусната површина –бочна површина на конусот.
-Радиусот на основата се вика радиус на конусот
-Отсечката SO што го сврзува врвот со центарот на основата се вика оска на конусот,тоа е и неговата висина.
-Отсечка чии крајни точки се врвот S на конусот и која било точка Т од периферијата на основата,како и должината ST=s се вика генератриса.
-Пресекот на конус со рамнина што минува низ неговата оска секогаш е рамнокрак триаголник.Тој се вика осен пресек на конусот
-Ако осниот пресек е рамностран триаголник т.е. s=2R,тогаш за конусот се вели дека е рамностран конус



s2= H2 + R2

Мрежа



-Ако конусот се пресече по една негова генератрица и по периферијата на основата, тогаш може да се види дека мрежата на конусот е составена од еден круг (основата)и еден кружен исечок(бочната површина),како на цртежот.

Плоштина и волумен

а) $P = B + M$ (B-плоштина на основа, M-плоштина на бочна површина)
б) $B = R2\pi$ (плоштина на круг)
в) $M = 2R\pi \times s / 2 = Rs\pi$ (плоштина на кружен исечок)
г) $P = R2\pi + Rs\pi$; $P= R\pi (R + s)$

Волумен
- Волуменот V на конус со радиус R и висина H е :
$V = B \times H / 3$
$V = R2\pi H/ 3$

-Плоштина и волумен на рамностран конус
$P = 3R2\pi$
$V = R3\pi\sqrt{3} / 3$