Методи за решавање на систем од линеарни равенки 2x2

Графички метод

Графички да се реши систем од 2 линеарни равенки со 2 непознати, значи да се нацртаат во координатен систем правите претставени со првата, односно втората равенка и да се разгледа нивниот однос.

За даден систем од две линеарни равенки со две непознати, нека *p* и *q* се прави кои графички ги претставуваат првата односно втората равенка од системот. Зависно од односот на правите:

1. Системот линеарни равенки 2x2 има единствено решение, правите се сечат ако: подредениот пар реални броеви (m,n) е решение на системот 2x2, односно точката со координати (m,n) лежи и на едната и на другата права.
2. Системот линеарни равенки 2x2 има бесконечно многу решенија, ако правите се совпаѓаат.
3. Системот линеарни равенки 2x2 нема решение, ако правите немаат заедничка точка т.е. правите се паралелни – системот е неконзистентен.

Пример1: Графички да се реши системот: $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y=0 \end{cases}$!

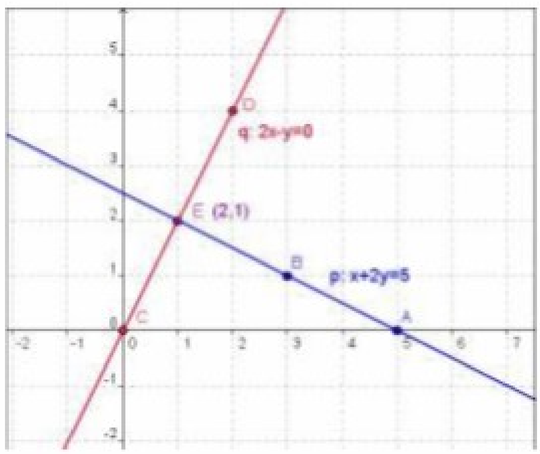
Решение:

Прва равенка: *p: x+2y=5*

	A	B
x	5	3
y	0	1

Втора равенка: *q: 2x-y=0*

	C	D
x	0	2
y	0	4



слика 1

Системот има единствено решение, правите се сечат во точката **E(2,1)**.

Пример 2: Графички да се реши системот: $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$!

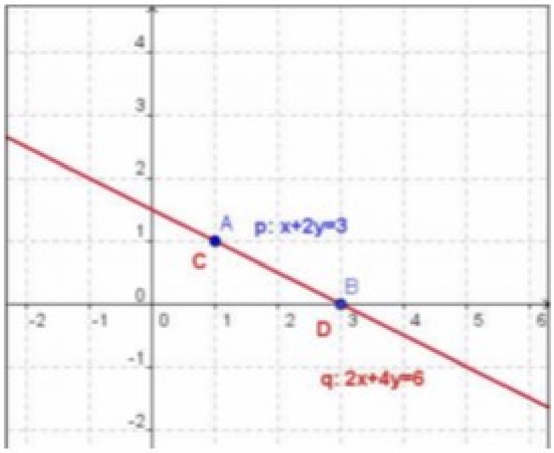
Решение:

Првата равенка: *p: x+2y =3*

	A	B
x	1	3
y	1	0

Втората равенка: *q: 2x+4y=6*

	C	D
x	1	3
y	1	0



слика 2

Системот има бесконечно многу решенија – правите се совпаѓаат.

Пример 3: Графички да се реши системот: $\begin{cases} x+3y=2 \\ x+3y=5 \end{cases}$!

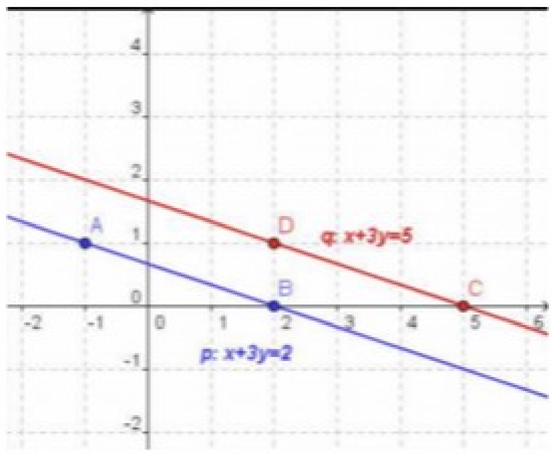
Решение:

Првата равенка: *p: x+3y=2*

	A	B
x	-1	2
y	1	0

Втората равенка: *q: x+3y=5*

	C	D
x	5	2
y	0	1



слика 3

Системот нема решение, правите немаат заедничка точка – системот е некозистентен.

Метод на замена

Ако од едната равенка од системот ја изразиме едната непозната преку втората и со добиениот израз ја замениме таа непозната во другата равенка, тогаш новодобиената и првата равенка на системот образуваат нов систем кој е еквивалентен на дадениот.

Метод на замена е посебно погоден ако коефициентот пред некоја од променливите е 1 или -1. Тогаш лесно е да се изрази таа променлива.

Пример 4: Со примена на метод на замена да се реши системот линеарни равенки 2х2: $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y=0 \end{cases}$!

Решение:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 2x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 2\cdot(5-2y)-y=0 \end{cases}$

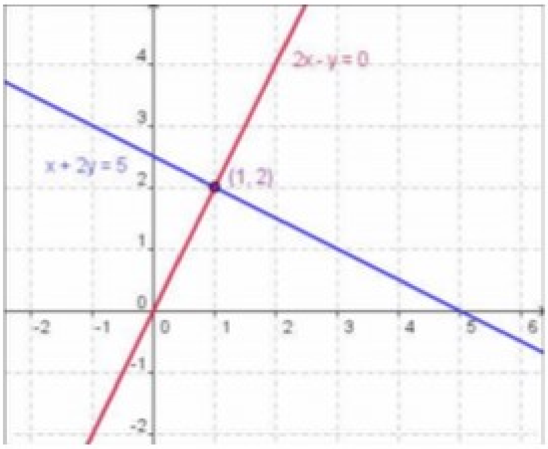
$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 10-4y-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 10-5y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 10=5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ 5y=10/:5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5-2\cdot 2 \\ y=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5-4 \\ y=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$



слика 4

Системот има единствено решение, а тоа е подредениот пар: (1,2). На графикот се гледа дека правите се сечат во точка чии координати се всушност решението на системот (1,2).

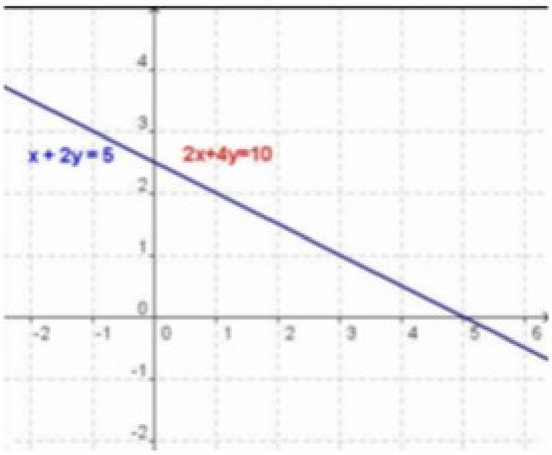
Пример 5: Со примена на метод на замена да се реши системот линеарни равенки 2х2: $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x+4y=10 \end{cases}$!

Решение:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2y \\ 2x+4y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2y \\ 2\cdot(5-2y)+4y=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2y \\ 10-4y+4y=10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2y \\ 10=10 \end{cases}$$



слика 5

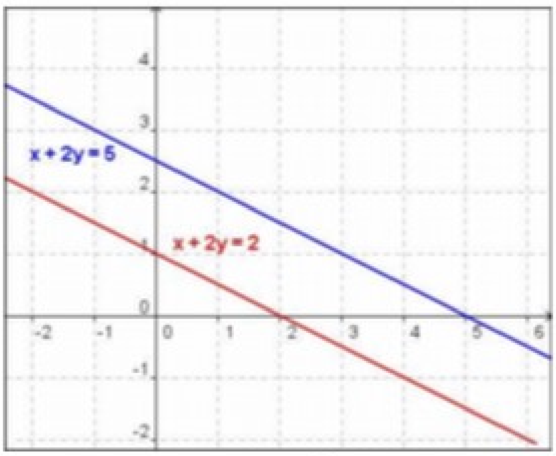
Во тек на решавањето, една од равенките на системот станува точен исказ 10 = 10.
Ако ги анализираме равенките на системот ќе забележиме дека втората равенка е добиена со множење на првата равенка во коефициент 2. Уште пред да започнеме со решавање на системот со примена на метод на замена знаеме дека графичкото решение го претставуваат две прави што се совпаѓаат.
Заклучуваме дека системот има бесконечно многу решенија.

Пример 6: Со примена на метод на замена да се реши системот линеарни равенки 2x2: $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+2y=2 \end{cases}$!

Решение:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2y \\ x+2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2y \\ (5-2y)+2y=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5-2y \\ 5=2 \perp \end{cases}$$



слика 6

Исказот 5 = 2 е нелогичен, неточен и затоа заклучуваме дека системот нема решение. Правите се паралелни и немаат заедничка точка т.е. системот е неконзистентен.

Метод на собирање (елиминација или спротивни коефициенти)

Ако во еден систем ги собереме, односно одземеме, левите и десните страни на равенките, ќе добиеме нова равенка, која заедно со една од дадените образува нов систем, еквивалентен на дадениот.

Со други зборови, системот равенки:

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ е еквивалентен со системот: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y+k(a_1x+b_1y)=c_2+kc_1 \end{cases}$ каде k е реален број или броен израз кој не зависи од x и y.

Заради споредба ќе го решиме истиот систем од пример 4.

Пример 7: Со примена на метод на собирање да се реши системот линеарни равенки 2x2: $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y=0 \end{cases}$!

Решение:

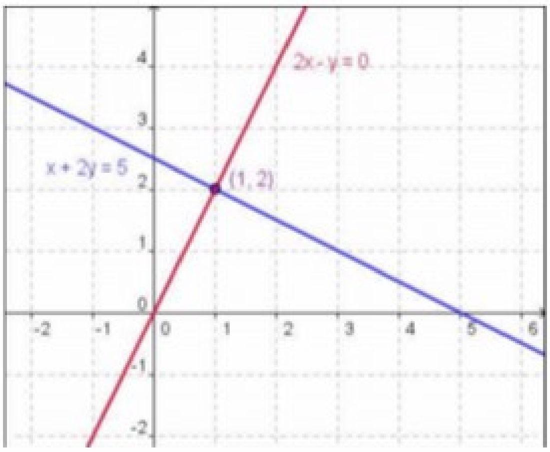
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y=0\,/\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ 4x-2y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ 5x-0y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ 5x=5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2y=5\,/-1 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y=4/:2 \\ x=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}$$



слика 7

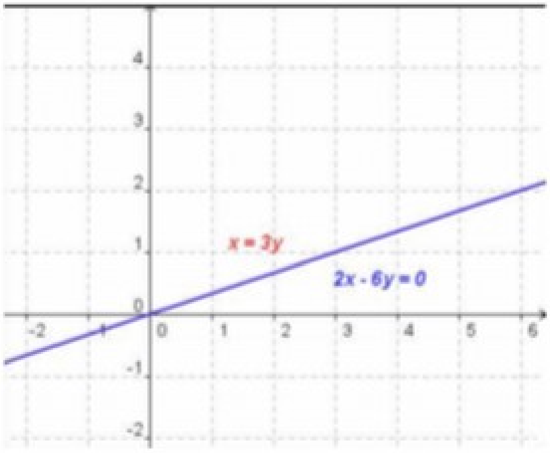
Системот има единствено решение, а тоа е подредениот пар: (1,2). На графикот се гледа дека правите се сечат во точка чии координати се всушност решение на системот (1,2).

Пример 8: Со примена на метод на собирање да се реши системот линеарни равенки 2x2:
$\begin{cases} 2x-6y=0 \\ x=3y \end{cases}$!

Решение:

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6y=0 \\ x-3y=0 / \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6y=0 \\ 2x-6y=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-6y=0 \\ 0=0 \end{cases}$



слика 8

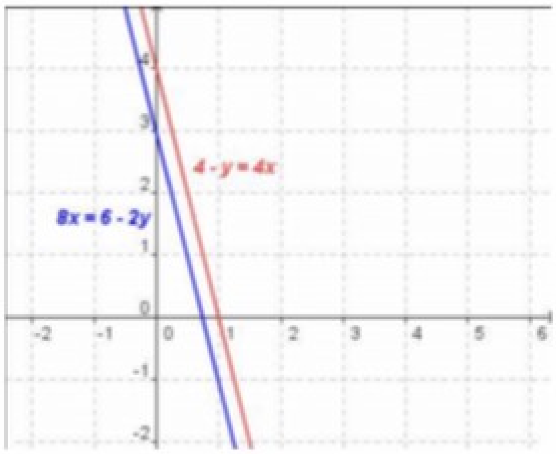
Во тек на решавањето, една од равенките на системот станува точен исказ 0 = 0.
Ако ги анализираме равенките на системот ќе забележиме дека првата равенка е добиена со множење на втората равенка во коефициент 2. Уште пред да започнеме со решавање на системот со примена на метод на собирање знаеме дека графичкото решение го претставуваат две прави што се совпаѓаат. Заклучуваме дека системот има бесконечно многу решенија.

Пример 9: Со примена на метод на собирање да се реши системот линеарни равенки 2x2:
$\begin{cases} 8x=6-2y \\ 4-y=4x \end{cases}$!

Решение:

$\Leftrightarrow \begin{cases} +8x+2y=6 \\ -4x-1y=-4 / \cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} +8x+2y=6 \\ -8x-2y=-8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-y=4x \\ 0=-2 \perp \end{cases}$



слика 9

Исказот 0 = - 2 е неточен, нелогичен и затоа заклучуваме дека системот нема решение. Правите се паралелни и немаат заедничка точка т.е. системот е неконзистентен.

Метод на детерминанти – Крамерово правило

Нека е зададен системот: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Изразот:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

се вика детерминанта од втор ред, додека коефициентите a_1, b_1, односно a_2, b_2 ја определуваат соодветно првата и втората редица на детерминантата. Или, a_1, a_2, односно b_1, b_2 ја определуваат првата и втората колона на детерминантата, соодветно. D се вика главна детерминанта на системот.

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$ и $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$ се викаат помошна (споредна) детерминанта за x, односно помошна (споредна) детерминанта за y, соодветно.

Решение на систем линеарни равенки 2x2: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

може да се пресмета со користење на Крамерово правило или Крамерови формули:

$x = \dfrac{D_x}{D}$ и соодветно: $y = \dfrac{D_y}{D}$.

Заради споредба ќе го решиме истиот систем од пример 4 и пример 7.

Пример 10: Со примена на метод на детерминанти да се реши системот линеарни равенки 2x2: $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-y=0 \end{cases}$!

Решение:

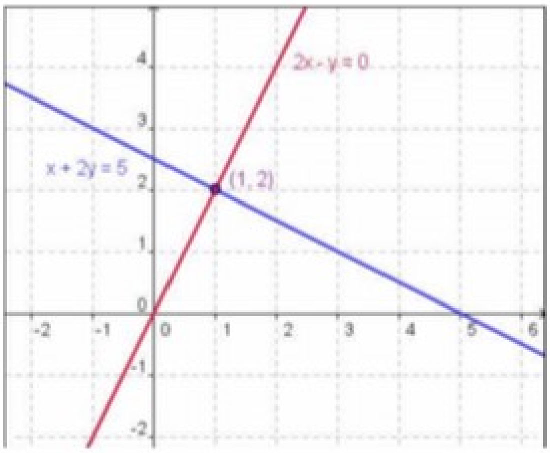
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1\cdot(-1)-2\cdot 2=-1-4=-5$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=5\cdot(-1)-0\cdot 2=-5-0=-5$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot 0-2\cdot 5=0-10=-10$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-5}{-5}=1$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-10}{-5}=2$$



слика 10

Системот има единствено решение, а тоа е подредениот пар: (1,2). На графикот се гледа дека правите се сечат во точка чии координати се всушност решение на системот (1,2).

Пример 11: Со примена на метод на детерминанти да се реши системот линеарни равенки 2x2: $\begin{cases} x+y=4 \\ 3y=12-3x \end{cases}$!

Решение:

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 3y=12-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ 3x+3y=12 \end{cases}$$

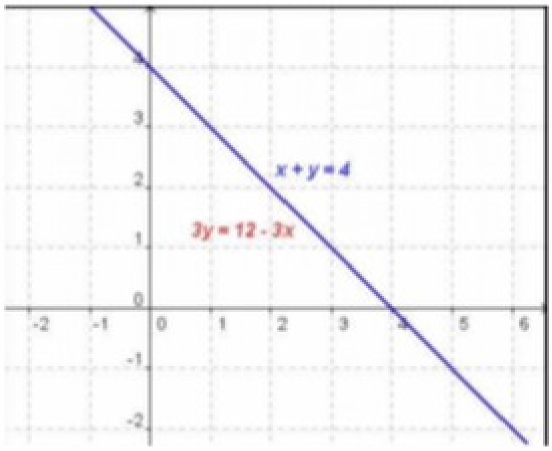
$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=1\cdot 3-3\cdot 1=3-3=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}=4\cdot 3-12\cdot 1=12-12=0$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}=1\cdot 12-3\cdot 4=12-12=0$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{0}{0}=?$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{0}{0}=?$$



слика 11

Колкава е вредноста на x и y ? Ако ги анализираме равенките на системот ќе забележиме дека втората равенка е добиена со множење на првата равенка во коефициент 3. Уште пред да започнеме со решавање на системот со примена на детерминанти знаеме дека графичкото решение го претставуваат две прави што се совпаѓаат.
Заклучуваме дека системот има бесконечно многу решенија.

Пример 12: Со примена на метод на детерминанти да се реши системот линеарни равенки 2x2: $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+2y=2 \end{cases}$!

Заради споредба, ќе го решиме истиот систем од пример 6.

Решение:

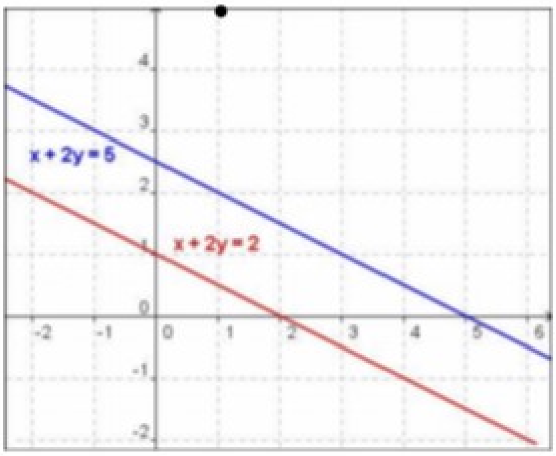
$$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 2=2-2=0$$

$$D_x=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=5\cdot 2-2\cdot 2=10-4=6$$

$$D_y=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 5=2-5=-3$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{6}{0}=\infty$$

$$y=\frac{-3}{0}=\infty$$



слика 12

Колкава е вредноста на x и y ? Што знаеме за делење со 0? Заклучуваме дека системот нема решение. Правите се паралелни и немаат заедничка точка т.е. системот е неконзистентен.