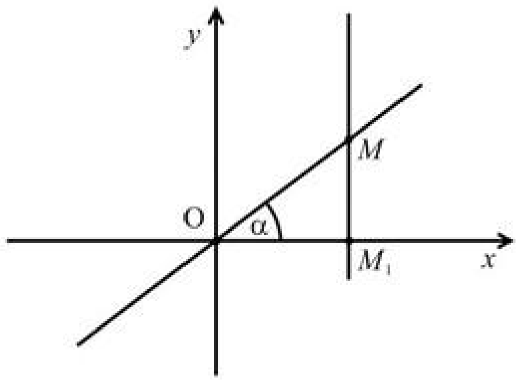
5. 5. Експлицитен облик на равенка на права

Бидејќи права е основен геометриски поим кој не се дефинира, за да дојдеме до нејзината равенка, потребно е да искористиме некое нејзино својство. Да ја изведеме најнапред равенката на права која минува низ координатниот почеток и е различна од координатните оски (црт. 12).



Црт. 12

Нека $M(x, y)$ е произволна точка од правата различна од координатниот почеток. Да ги означиме со M_1 ортогоналната проекција на точката M на $x-$оската и со α аголот што го зафаќа правата со позитивната насока на $x-$оската. Тогаш односот

$$\frac{\overline{MM_1}}{\overline{M_1O}} = \frac{y}{x} = tg\alpha$$

е константен за произволна положба на точката М. Тој се означува со k и с… нарекува **аглов коефициент** или **коефициент на правец** на правата. Оттука след… дека координатите на секоја точка од правата ја задоволуваат равенката

$\boxed{y = kx}$.

Според тоа, последната равенка претставува равенка на права која минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол α, каде што $k = tg\alpha$.

1. Запиши ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Бидејќи правата минува низ координатниот почеток, нејзината равенка е од облик $y = kx$. Од условот на задачата имаме дека $k = tg\alpha = tg\frac{\pi}{4} = 1$. Според тоа, бараната равенка гласи $y = x$. ♦

Нека е дадена произволна права во координатната рамнина. Тогаш можни се следниве три случаи:

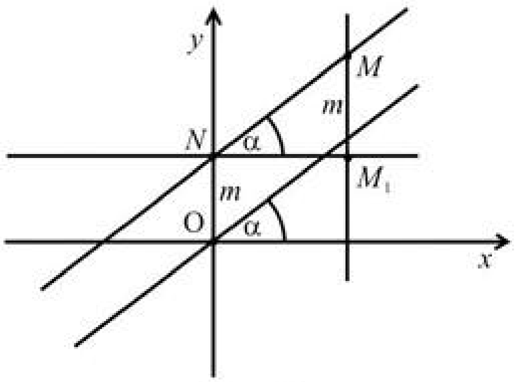
• правата ги сече двете координатни оски (црт. 13). Нека $N(0, m)$ е пресечната точка на правата со $y-$оската. Притоа, ординатата на секоја точка од правата е поголема за m, ако m е позитивно или намалена за m, ако m е негативно, во однос на точките од правата што минува низ координатниот почеток и е паралелна на дадената. Двете разгледувани прави зафаќаат еднакви агли со позитивната насока на $x-$оската, па според тоа нивните аглови коефициенти се еднакви. Бидејќи правата која што минува низ координатниот почеток е зададена со равенката

$$y = kx,$$

за равенката на дадената права добиваме:

$$\boxed{y = kx + m},$$

каде што k е коефициентот на правецот на дадената права, а m е отсечокот на $y-$оската. Добиената равенка се нерекува **експлицитен облик на равенка на права**, а за правата велиме дека е зададена во **експлицитен облик**.



Црт. 13

2. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M(2,-3)$ и $N(5,6)$.

• Според условот на задачата, точките $M(2,-3)$ и $N(5,6)$ се точки од правата, па нивните координати ја задоволуваат равенката $y = kx + m$. На тој начин доаѓаме до системот $\begin{cases} -3 = 2k + m \\ 6 = 5k + m \end{cases}$ чии решенија се $k = 3$ и $m = -9$. Според тоа, бараната равенка гласи $y = 3x - 9$. ♦

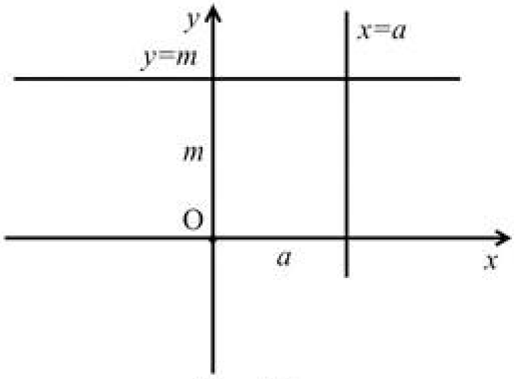
Имајќи го предвид геометриското значење на агловиот коефициент и отсечокот на ординатната оска во експлицитниот облик на равенка на права може да заклучиме дека:

а) две прави имаат еднакви аглови коефициенти ако и само ако се паралелни;

б) две прави имаат еднакви отсечоци на ординатните оски ако и само ако ја сечат ординатната оска во една иста точка.

• правата е паралелна со $x-$оската или се совпаѓа со $x-$оската (црт. 14). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од $x-$оската. Бидејќи растојанието од $x-$оската на точка е нејзината ордината, може да заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со m, за равенката на правата добиваме:

$$\boxed{y = m}$$



Црт. 14

Оваа положба на правата може да се третира како специјален случај на претходниот. Имено, во овој случај правата зафаќа агол

$\alpha = 2k\pi,\ k = 0,1,2,...$ со позитивната насока на $x-$оската, па според тоа агловиот коефициент $k = 0$. Специјално равенката на $x-$оската е $y = 0$;

• правата е паралелна со $y-$оската или се совпаѓа со $y-$оската (црт. 14). Тогаш сите точки од правата се на еднакво растојание од $y-$оската. Бидејќи растојанието од $y-$оската на една точка, всушност, е нејзината ордината, може да заклучиме дека сите точки од дадената права имаат меѓусебно еднакви ординати. Ако тоа растојание го означиме со a, за равенката на правата добиваме

$\boxed{x = a}$

Специјално $y-$оската е зададена со равенката $x = 0$.

3. Каква е положбата на правите $x = 2$ и $y = 3$ во координатната рамнина?

Правата $x = 2$ е паралелна на $y-$оската и секоја нејзина точка е на растојание од 2 единици од неа, додека правата $y = 3$ е паралелна на $x-$оската и секоја нејзина точка е на растојание од 3 единици од неа.♦

Задачи за самостојна работа

1. Провери дали точките $M(-1,1)$, $N(2,-3)$ и $P(2,2)$ се точки од правата $y = -x + 4$.

2. Најди ја равенката на правата што минува низ координатниот почеток и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол:

а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; б) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$; в) $\alpha = \pi$.

3. Најди ги агловиот коефициент и отсечокот на $y-$оската на правата зададена со:

а) $y = 2x - 3$; б) $y = -x + 3$; в) $y = -2$; г) $y = \sqrt{3}x$.

4. Запиши ја равенката на правата која со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = \frac{\pi}{3}$ и отсечокот на ординатната оска е еднаков на $-\frac{1}{2}$.

5. Запиши ја равенката на правата што минува низ точката $A(-3,2)$ и со позитивната насока на $x-$оската зафаќа агол $\alpha = 135^0$.

6. Најди ги агловиот коефициент и отсечокот на ординатната оска што го отсекува правата што минува низ точките $A(2,-1)$ и $B(-3,5)$.

7*. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M(2,-8)$ и $N(-1,7)$.

5. 6. Општ облик на равенка на права

Во претходната лекција за равенка на права во координатната рамнина добивме равенка од прв степен по променливите x и y. Во оваа лекција ќе разгледаме што претставува општа равенка од прв степен со две променливи x и y, односно равенка од обликот:

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Претпоставуваме дека $A \neq 0$ или $B \neq 0$. Навистина, ако $A = B = 0$, тогаш дадената равенката се сведува на равенката $C = 0$. Во тој случај, ако $C \neq 0$ не постојат точки во рамнината кои ја задоволуваат равенката, додека, ако $C = 0$, сите точки во рамнината ја задоволуваат равенката.

• Ако $A = 0$, тогаш $B \neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $y = -\frac{C}{B}$. Геометриското место на точки во рамнината коишто ја задоволуваат последната равенка е права паралелна со $x-$оската и минува низ точката $M\left(0, -\frac{C}{B}\right)$.

• Ако $B = 0$ тогаш $A \neq 0$, па равенката (1) е еквивалентна на равенката $x = -\frac{C}{A}$. Геометриското место на точки во рамнината кои ја задоволуваат последната равенка е права која е паралелна со $x-$оската и минува низ точката $N\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$.

• Ако $A \neq 0$ и $B \neq 0$, тогаш равенката (1) е еквивалентна на равенката $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ која што е равенка на права во експлицитен облик со аглов коефициент $k = -\frac{A}{B}$ и отсечок на $y-$оската $m = -\frac{C}{B}$.

Од направената дискусија може да заключиме дека равенката од облик

$$\boxed{Ax + By + C = 0}$$

е равенка на права, наречена **општ облик на равенка на права**.

1. Доведи ја во општ облик равенката на правата $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

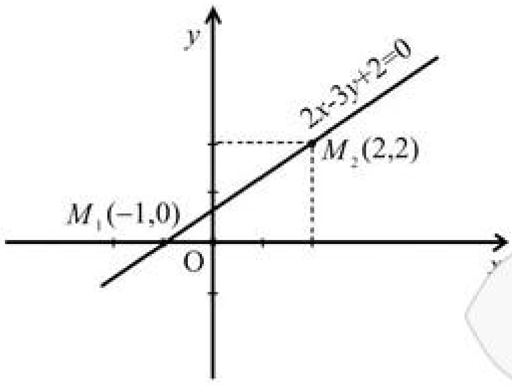
Равенка е еквивалентна на равенката $\frac{1}{2}x + y - 3 = 0$, односно на равенката $x + 2y - 6 = 0$. ♦

2. Дадена е равенката на права $3x + 3y - 5 = 0$. Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на $x-$оската и отсечокот на $y-$оската.

Ако дадената равенка ја решиме според y ја добиваме равенката $y=-x+\frac{5}{3}$, која е еквивалентна на дадената, односно претставува равенка на една иста права во рамнината. Од $k=tg\alpha=-1$ следува дека $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ и $m=\frac{5}{3}$. ♦

3. Конструирај ја правата зададена со равенката $2x-3y+2=0$.

За да ја решиме поставената задача, доволно е да конструираме две точки од правата а потоа низ нив да ја конструираме правата (црт. 15). Избираме две произволни вредности за x, а потоа ги пресметуваме соодветните вредности за y. Во овој случај згодно е една избрана вредност да биде, на пример, $x_1=2$, бидејќи во тој случај добиваме целоброjна вредност за y, $y_1=2$. Слично, можеме да избереме вредност за x, $x_2=-1$, од каде добиваме дека $y_2=0$. ♦



Црт. 15

Задачи за самостојна работа

1. Доведи ги во општ облик следниве равенки на права:

а) $y=2x-3$; б) $y=-4$; в) $x=3$.

2. Најди ги коефициентот на правецот и отсечокот на ординатната оска на правите:

а) $2x-y+3=0$; б) $5x+2y-3=0$; в) $3x+8y+16=0$.

3. Дадена е равенката на права $x+y-3=0$. Најди ги аголот што го зафаќа дадената права со позитивната насока на $x-$оската и отсечокот на $y-$оската.

4. Конструирај ги правите зададени со равенките:

а) $y=3x+1$; б) $x=\sqrt{2}$; в) $y=\pi$;

г) $y=2x+2$; д) $y=\frac{1}{3}x-2$; ѓ) $x=0{,}5y-1$.

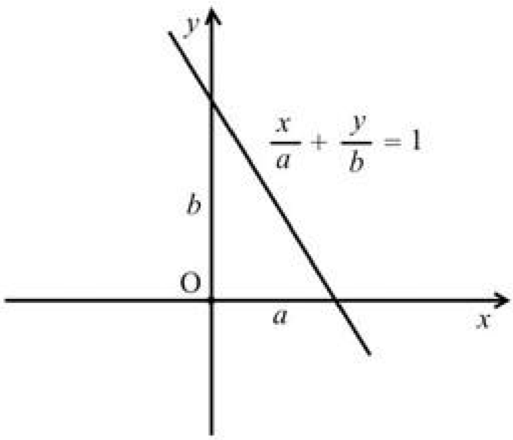
5*. Дали равенките $Ax+By+C=0$ и $\lambda Ax+\lambda By+\lambda C=0$, каде што $\lambda\neq 0$ се равенки на една иста права во координатната рамнина.

5. 7. Сегментен облик на равенка на права

Како што веќе видовме, равенката

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

претставува равенка на права во координатната рамнина. Притоа, правата минува низ координатниот почеток ако и само ако $C = 0$. Коефициентот $A = 0$ ако и само ако правата е паралелна на $x-$оската, додека коефициентот $B = 0$ ако и само ако правата е паралелна на $y-$оската.



Црт. 16

Претпоставуваме дека дадената права не минува низ координатниот почеток и не е паралелна со ниту една координатна оска (црт. 16). Тогаш за коефициентите од нејзината равенка важи: $A \neq 0$, $B \neq 0$ и $C \neq 0$. Ако равенката (1) ја помножиме со бројот $-\frac{1}{C}$, таа го добива обликот

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1.$$

Ако ставиме $a = -\frac{C}{A}$ и $b = -\frac{C}{B}$, тогаш равенката го добива обликот:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad (2)$$

наречен **сегментен облик на равенка на права**.

Да го испитаме геометриското значење на параметрите a и b. Ако во равенката (2) ставиме $y = 0$, а потоа $x = 0$, ги добиваме пресечните точки $P(a,0)$ и $Q(0,b)$ на правата со $x-$оската, односно $y-$оската. Според тоа броевите a и b по апсолутна вредност се еднакви на должините на отсечките што ги отсекува правата од $x-$оската и $y-$оската, соодветно. Нив ги нарекуваме **отсечоци** или **сегменти** на оските.

1. Запиши ја во сегментен облик равенки на права $x - 3y - 6 = 0$, а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од координатните оски.

Дадената равенка на права е равенка од општ облик. Ако равенката ја помножиме со $-\frac{1}{C}=-\frac{1}{-6}=\frac{1}{6}$, ја добиваме равенката $\frac{x}{6}-\frac{y}{2}=1$ која е еквивалентна со равенката $\frac{x}{6}+\frac{y}{-2}=1$. Последната равенка е запишана во сегментен облик и е еквивалентна на дадената. Должината на сегментот на $x-$оската изнесува 6 единици, додека должината на сегментот на $y-$оската изнесува 2 единици. ♦

2. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $2x-5y-10=0$.

Бидејќи координатните оски се сечат под прав агол, бараниот триаголник е правоаголен со теме при правиот агол во координатниот почеток, катетите лежат на координатните оски, а хипотенузата на дадената права. Знаеме дека плоштината на правоаголен триаголник е еднаква на полупроизводот од должините на неговите катети, а тоа се токму должините на сегментите отсечени на координатните оски. Ако равенката на правата ја трансформираме до сегментен облик, ја добиваме равенката $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$. Според тоа, должините на сегментите се 5 единици и 2 единици од каде што следува дека бараниот правоаголен триаголник има катети 5 единици и 2 единици. Тогаш неговата плоштина изнесува 5 квадратни единици. ♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ги во сегментен облик следниве равенки на права:

а) $3x-2y+12=0$; б) $y=-x+1$; в) $y=4x-2$,

а потоа најди ги должините на сегментите на секоја од кооринатните оски.

2. Најди ја вредноста на параметарот k за која збирот на сегментите на координатните оски што ги отсекува правата $2x+5ky-3=0$ е еднаков на 10.

3. Најди ја вредноста на параметарот k за која производот на сегментите на координатните оски што ги отсекува правата $6x+5y-12k=0$ е еднаков на $\frac{5}{6}$.

4. Пресметај ја плоштината на триаголникот заграден со координатните оски и правата $x+2y-6=0$.

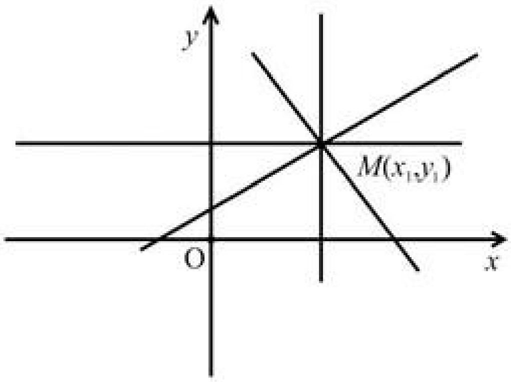
5*. Низ точката $M(4,-3)$ повлечи права која со координатните оски заградува триаголник со плоштина еднаква на 3 квадратни единици.

5. 8. Однос на права и точка

5.8.1. Равенка на сноп прави низ една точка

Нека $M(x_1, y_1)$ е фиксна точка во координатната рамнина. Низ дадената точка минуваат безброј прави за кои велиме дека формираат **сноп прави** со центар во точката M (црт. 17). Секоја права низ точката М има општа равенка

$Ax + By + C = 0.$



Црт. 17

Точката M лежи на правата, па нејзините координати ја задаволуваат равенката на правата, односно важи

$Ax_1 + By_1 + C = 0.$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме:

$$\boxed{A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0}$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права која минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентите A и B ги добиваме равенките на различните прави низ точката M.

Од сите прави во снопот прави низ M постои единствена права која е паралелна на y – оската. Нејзината равенка гласи $x = x_1$. Единствено таа права нема аглов коефициент и нема отсечок на y – оската, па според тоа оваа права не може да се зададе во експлицитен облик. Секоја друга права низ точката M има експлицитна равенка

$y = kx + n.$

Бидејќи точката M лежи на правата, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството

$y_1 = kx_1 + n.$

Ако добиеното равенство го одземеме од равенката на правата, добиваме:

$$\boxed{y - y_1 = k(x - x_1)}$$

Секоја равенка од овој облик е равенка на права која минува низ точката M бидејќи нејзините координати ја задоволуваат равенката. Со задавање на различни вредности на коефициентот k, ги добиваме равенките на различните прави низ точката M, освен правата паралелна со y – оската.

1. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-3{,}2)$ и со позитивната насока на $x-$ оската зафаќа агол $\alpha = 135^0$.

Снопот прави со центар во точката M има равенка $y-2=k(x+3)$. Бидејќи бараната права од снопот со $x-$оската зафаќа агол $\alpha = 135^0$, таа има аглов коефициент $k = tg135^0 = -1$. Тогаш бараната равенка на права гласи $y-2=-(x+3)$, односно $x+y+1=0$. ♦

5.8.2. Равенка на права низ две точки

Користејќи ја равенката на сноп прави низ една точка, може лесно да ја најдеме равенката на права која минува низ две дадени точки.

1. Запиши ја равенката на правата која минува низ точките $M_1(-12{,}5)$ и $M_2(8;-3)$.

Снопот прави со центар во M_1 има равенка $y-5=k(x+12)$. Бидејќи бараната права минува низ точката M_2, нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата, односно важи равенството $-3-5=k(8+12)$, од каде што добиваме дека $k=-\dfrac{2}{5}$. Според тоа, равенката на правата гласи $y-5=-\dfrac{2}{5}(x+12)$, односно $2x+5y-1=0$. ♦

Примерот што го разгледавме ја открива постапката за наоѓање равенка на права низ две дадени точки. Нека се дадени точките $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$, (црт. 18). Ќе ја најдеме равенката на правата што минува низ дадените точки, односно правата M_1M_2.

• Ако $x_1 = x_2$, тогаш правата M_1M_2 е нормална на $y-$оската, па нејзината равенка во тој случај гласи

$$\boxed{x = x_1}$$

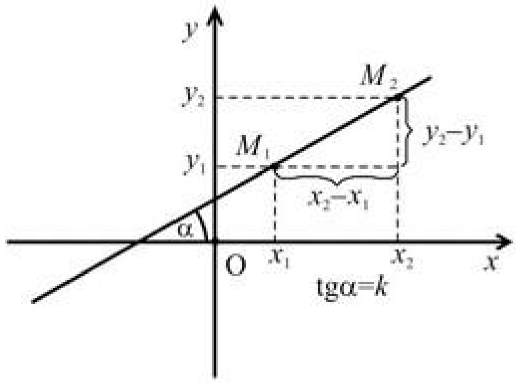
• Ако $x_1 \neq x_2$, тогаш снопот прави со центар во M_1 има равенка

$$y - y_1 = k(x - x_1).$$

Бидејќи правата M_1M_2 минува низ точката M_2 нејзините координати го задоволуваат равенството

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1).$$

Тогаш аглoвиот коефициент на правата M_1M_2 е



Црт. 18

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Ако вредноста за k ја замениме во равенката на снопот прави, ја добиваме **равенката на права низ двете дадени точки**:

$$\boxed{y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)}$$

Од равенката на права низ две дадени точки можеме да го изведеме **условот за колинеарност на три точки**. Имено, трета точка $M_3(x_3, y_3)$ лежи на правата определена со точките M_1 и M_2 ако и само ако нејзините координати ја задоволуваат равенката на правата определена со двете дадени точки, односно равенката

$$\boxed{y_3 - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x_3 - x_1)}$$

5.8.3. Растојание од точка до права

Наша следна задача е да научиме да пресметуваме растојание од дадена точка до дадена права во координатната рамнина. Како што знаеме, растојанието од точка до права е еднакво на должината на нормалата спуштена од точката кон правата.

Ако равенката на правата е зададена во општ облик

$Ax + By + C = 0$,

тогаш равенката треба да ја помножиме со нормирачки множител $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот C. Тогаш растојанието од дадената точка до правата се добива на тој начин што во левата страна од равенката на правата, запишана во облик

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0,$$

ги заменуваме координатите на точката, а потоа се зема апсолутна вредност од добиениот број. Конечно добиваме

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

1. Најди ги растојанијата од точките $A(2,1)$ и $B(-2,4)$ до правата $4x - 3y + 15 = 0$.

За да го најдеме растојанието од дадената точка до правата, треба равенката да ја множиме со нормирачкиот множител $M = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\pm 5}$. Знакот на нормирачкиот множител се избира да биде спротивен од знакот на коефициентот C, па во овој случај $M=-\frac{1}{5}$. Тогаш равенка на правата гласи $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-3=0$. Ако сега ги замениме ккоринатите на дадената точка, добиваме $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot 2+\frac{3}{5}\cdot 1-3\right|=\left|-4\right|=4$. Бидејќи знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше негативен, точката А и координатниот почеток се на иста страна од правата.

Аналогно, за точката B добиваме $d=\left|-\frac{4}{5}\cdot(-2)+\frac{3}{5}\cdot 4-3\right|=\left|1\right|=1$. Во овој случај знакот на d пред земањето на апсолутната вредност беше позитивен, па точката B и координатниот почеток се на различни страни од правата.♦

Задачи за самостојна работа

1. Запиши ја равенката на снопот прави што минуваат низ точките:
а) $M(2,-3)$; б) $M(-1,4)$.

2. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-2,1)$ и има аглов коефициент $k=-3$.

3. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(4,-7)$ и со позитивната насока на x – оската зафаќа агол $\alpha=120^0$.

4. Најди го коефициентот на правецот на правата која минува низ точките:
а) $M_1(-1,4)$ и $M_2(4;-3)$; б) $M_1(0,-2)$ и $M_2(-1;3)$; в) $M_1(1,4)$ и $M_2(-2,4)$.

5. Запиши ја равенката на правата што минува низ точките $M_1(-1,4)$ и $M_2(4,-3)$.

6. Дали точките $M_1(0,3)$, $M_2(2,6)$ и $M_3(-1,-3)$ лежат на иста права?

7. Најди го растојанието од точката $A(-5,-1)$ до правата $4x+3y+30=0$. Дали дадената точка и координатниот почеток се на иста страна од правата?

8. Најди го растојанието на правата $9x-12y+10=0$ од координатниот почеток.

9*. Определи која од точките $M(-3,1)$ и $N(5,4)$ е на помало растојание од правата $x-2y-5=0$. Покажи дека дадената права не ја сече отсечката MN.

10*. Најди ја равенката на правата која е на растојание $d=5$ од точката $C(4,3)$ и отсекува еднакви сегменти на координатните оски.

5. 9. Заемна положба на две прави

5.9.1. Заемна положба на две прави

Како што знаеме, две прави во рамнина може да се сечат, да се паралелни или да се совпаѓаат. Нека се дадени две прави со своите општи равенки:

$A_1x+B_1y+C_1=0$

$A_2x+B_2y+C_2=0.$

Ќе ја испитаме зависноста меѓу коефициентите на дадените равенки во секој од наведените три случаи.

• Дадените прави се сечат, односно имаат една заедничка точка ако и само ако системот

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \qquad (1)$$

има единствено решение.

Нека (x_0y_0) е единственото решение на дадениот систем. Ако правата равенка од системот (1) ја помножиме со B_2, а втората со $-B_1$ и потоа ги собереме, добиваме:

$$(A_1B_2-A_2B_1)x_0+(C_1B_2-C_2B_1)=0 \qquad (2)$$

На сличен начин, ако првата равенка од системот (1) ја помножиме со B_2, а втората со $-B_1$ и потоа ги собереме, добиваме:

$$(A_1B_2-A_2B_1)y_0+(A_1C_2-A_2C_1)=0 \qquad (3)$$

Доволен услов за единственост на решението (x_0,y_0), односно доволен услов за да се сечат дадените прави е нејзините коефициенти да ја задоволуваат релацијата $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$, или

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}},$$

при што подразбираме дека ако некој од именителите е еднаков на нула, тогаш и соодветниот броител е еднаков на нула. Во тој случај решението на дадениот систем гласи:

$$x_0=\frac{B_1C_2-B_2C_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \qquad y_0=\frac{A_2C_1-A_1C_2}{A_1B_2-A_2B_1}. \qquad (4)$$

Добиените броевите се координати на пресечната точка на дадените прави. Навистина, ако добиените вредности за x и y од изразот (4) ги замениме во (1), ќе заклучиме дека равенките (1) преминуваат во идентитети.

1. Покажи дека правите $2x-y-5=0$ и $x+3y+1=0$ се сечат.

По елиминацијата на y, добиваме $7x-14=0$, од каде што следува дека $x=2$. Тогаш за y од првата равенка добиваме $y=-1$. ♦

• За да покажеме дека условот $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$ е потребен за да се сечат дадените прави, ќе го разгледаме случајот кога

$A_1B_2-A_2B_1=0.$

Ако во тој случај дадените прави имаат уште една зедничка точка (x_1,y_1) од равенствата (2) и (3), следува:

$C_1B_2-C_2B_1=0$ и $A_1C_2-A_2C_1=0.$

Од последните три равенства следува дека постои реален број λ таков што $A_2=\lambda A_1$, $B_2=\lambda B_1$ и $C_2=\lambda C_1$. Навистина, бидејќи еден од броевите A_1 или B_1 е различен од нула, може да претпоставиме дека $B_1\neq 0$. Ако ставиме $\lambda=\dfrac{B_2}{B_1}$ од равенството $A_1B_2-A_2B_1=0$ следува дека $A_2=\lambda A_1$, а од равенството $C_1B_2-C_2B_1=0$ следува дека $C_2=\lambda C_1$. Според тоа, равенката на едната права се добива од равенката на другата права помножена со реален број $\lambda\neq 0$. Тоа значи дека дадените прави се совпаѓаат. Условот за совпаѓање на две прави гласи:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}},$$

при што подразбираме дека ако некој од именителите е еднаков на нула, тогаш и соодветниот броител е еднаков на нула.

• Ако $A_1B_2-A_2B_1=0$ и еден од броевите $C_1B_2-C_2B_1$ и $A_1C_2-A_2C_1$ е различен од нула, тогаш системот (1) нема решение, што значи правите се паралелни. Според тоа, потребен и доволен услов дадените прави да бидат паралелни е условот

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}}.$$

2. Покажи дека правите $3x-2y+5=0$ и $4y-6x-1=0$ се паралелни.

Од $\dfrac{3}{-6}=\dfrac{-2}{4}\neq\dfrac{5}{1}$, следува дека правите се паралелни. ♦

5.9.2. Агол меѓу две прави. Услов за нормалност на две прави

Нека се дадени две прави со своите експлицитни равенки:

$y=k_1x+m_1$ и $y=k_2x+m_2$.

Бидејќи аголот φ под кој се сечат правите не се менува при транслација на правите, аголот што го зафаќаат дадените прави е еднаков на аголот што го зафаќаат правите:

$y = k_1 x$ и $y = k_2 x.$

Тогаш $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Ако на двете страни од равенството примениме тангенс добиваме

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}$$

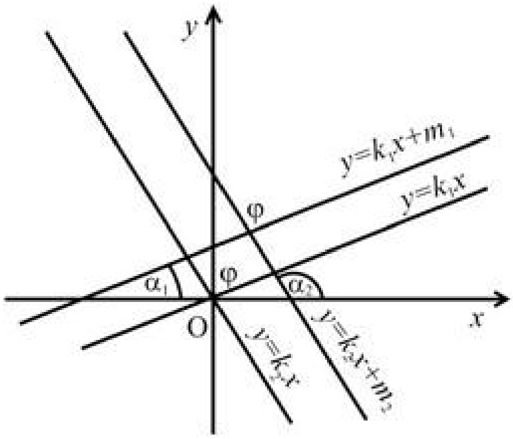
или ако знаеме дека

$tg\alpha_1 = k_1$ и $tg\alpha_2 = k_2$

добиваме дека

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

Аголот што се добива од оваа формула е аголот што се добива со ротација на првата права во позитивна насока околу пресечната точка додека не се совпадне со втората права (црт. 19).



Црт. 19

Ако едната од двете прави е паралелна со $y-$оската, тогаш аголот меѓу нив е $\frac{\pi}{2} - \alpha$, каде што α е аголот што го зафаќа другата права со позитивната насока на x $-$оската.

1. Најди го аголот меѓу правите $y = 2x - 3$ и $3x + y - 2 = 0$.

За првата права коефициентот на правецот $k_1 = 2$, а за втората права $k_2 = -3$. Според тоа, $tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-3-2}{1 + 2 \cdot (-3)} = 1$, од каде што следува дека $\varphi = \frac{\pi}{4}$. ♦

Ако правите се нормални, тогаш $k_2 = tg\alpha_2 = tg\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -ctg\alpha_1 = -\frac{1}{tg\alpha_1}$, од каде што следува дека $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Според тоа, **условот за нормалност на две прави** гласи:

$$\boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}}.$$

Ако едната од двете прави е паралелна со $y-$оската, тогаш тие се нормални ако и само ако другата права е паралелна со $x-$оската.

2. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $M(-1,1)$ и е нормална на правата чија равенка е $3x - y + 2 = 0$.

Равенката на снопот прави низ точката M гласи $y + 1 = k(x - 1)$. Треба да ја определиме равенката на онаа права од снопот која е нормална на дадената права, односно на правата $y = 3x - 2$. Од условот за нормалност на две прави, добиваме дека $k = -\frac{1}{3}$. Според тоа равенката на бараната права гласи $x + 3y + 2 = 0$. ♦

Ако правите се зададени со своите општи равенки:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$

тогаш изразувајќи ги коефициентите k_1 и k_2 преку коефициентите A_1, B_1, A_2 и B_2 имаме:

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1} \text{ и } k_2 = -\frac{A_2}{B_2},$$

од каде што за аголот меѓу две прави добиваме дека

$$\boxed{tg\varphi = \frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_1A_2 + B_1B_2}} \text{ за } A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0 \text{ и } \boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}} \text{ за } A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Ако правите се зададени со општи равенки, условот за нормалност гласи:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0}$$

Задачи за самостојна работа

1. Утврди кои од следниве прави се сечат, кои се паралелни, а кои се совпаѓаат. Во случај кога правите се сечат, најди ја пресечната точка:

а) $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$;

б) $3x + y - 17 = 0$ и $6x + 2y + 12 = 0$;

в) $2x - y + 3 = 0$ и $6x - 3y + 9 = 0$.

2. Најди ги пресечните точки на координатните оски со правите:

а) $x + 10y - 5 = 0$; б) $2x - 3y + 12 = 0$.

3. Најди ја равенката на правата што минува низ точката $A(-2,3)$ и е паралелна на правата $5x - 6y + 7 = 0$.

4. Најди го аголот меѓу правите $2x - y + 7 = 0$ и $3x + y + 10 = 0$.

5. Најди ја правата која минува низ точката $A(-2,8)$ и зафаќа агол $\varphi = \frac{\pi}{4}$ со правата $y = 3x - 5$.

6*. Најди ја равенката на правата која минува низ точката $A(3,15)$ и е нормална на правата $3x - 5y + 8 = 0$.

5. 10. Задачи за вежбање

1. Пресметај го периметарот на триаголникот ABC ако $A(-5,5)$, $B(7,-3)$ и $C(3,1)$.

2. Најди ги координатите на точката M која ја дели отсечката AB во однос λ, ако:

а) $A(10,3)$, $B(-2,-5)$ и $\lambda=\frac{1}{3}$; б) $A(-2,-5)$, $B(13,5)$ и $\lambda=\frac{3}{2}$.

3. Точките $A(1,1)$, $B(-1,3)$ и $C(2,0)$ лежат на една права. Определи го односот λ во кој точката A ја дели отечката CB.

4. Пресметај ја плоштината на триаголникот ABC, ако $A(0,0)$, $B(3,-2)$ и $C(1,5)$.

5. Најди ја равенката на правата која минува низ точките $M_1(-7,2)$ и $M_2(3,-5)$.

6. Докажи дека точките $A(1,9)$, $B(-2,3)$ и $C(-5,-3)$ лежат на една права.

7. Дадени се точките $A(-2,-1)$, $B(1,2)$ и $C(-1,4)$. Запиши ги координатите на точката D, ако $ABCD$ е паралелограм.

8. Најди го растојанието d од точката $M(2,3)$ до правата:

а) $3x+4y-25=0$; б) $12x-5y+4=0$.

9. Запиши ги равенките на медијаните на триаголникот ABC, ако $A(3,2)$, $B(5,4)$ и $C(1,4)$.

10. Даден е триаголник ABC. Запиши ги координатите на:

а) тежиштето T на триаголникот, ако $A(-8,1)$, $B(1,2)$ и $C(-5,-3)$;

б) ортоцентарот H на триаголникот, ако $A(-4,8)$, $B(1,-7)$ и $C(7,5)$.

11. Најди ги координатите на точката M која е симетрична на точката $N(3,2)$ во однос на правата $x-y+5=0$.

12*. Пресметај ја плоштината на даден квадрат, ако две негови страни лежат на правите $5x-12y-65=0$ и $5x-12y+26=0$.

13*. Запиши ја равенката на правата која минува низ точката $M(-3,8)$ и со координатните оски заградува триаголник со плоштина $P=6$.

14*. Најди го агловиот коефициент на висините на триаголникот ABC, ако $A(-2,1)$, $B(3,4)$ и $C(1,-2)$.